Université de Lorraine - UFR MIM - 2015/2016
Cours MATLAB

MATLAB 9

Systèmes dynamiques

J-P. Croisille

1- Equation de la logistique

On considère l'e.d.o.

$$\begin{cases} y'(t) = y(1-y) \\ y(0) = 1/10 \end{cases} \tag{1}$$

appelée équation de la logistique.

1) Entrer le script `logistic.m`

```
% -- SEP 16, 2010 - SCHEMA D'EULER EXPLICITE
% --               POUR L'EQUATION DE LA LOGISTIQUE
clear all;
T0=0; % TEMPS INITIAL
y0=2.% DONNEE INITIALE
T=10; % TEMPS FINAL
dt=0.2 % PAS DE TEMPS
n=floor(T/dt);
y=zeros(n,1); tt=zeros(n,1);
y(1)=y0;
tt(1)=T0;
for i=1:n-1
    y(i+1)=y(i)+dt*y(i)*(1-y(i));
    tt(i+1)=T0+(i+1)*dt;
end
plot(tt,y,'o');

```

. Vérifier que ce programme effectue la résolution de l'équation (1) par le schéma d'Euler explicite sur l' intervalle $[T0, T]$. On note `dt` le pas de temps. Réaliser plusieurs simulations avec ce code pour `dt=1`, `dt=0.1`, `dt=0.01`,... sur $t \in [0, 10]$.

2) Choisir différentes conditions initiales y_0 et tracer les résultats obtenus sur le même dessin.

3) Ecrire une variante du programme ci-dessus qui fait le même calcul, mais en effectuant une animation à l'affichage. On pourra utiliser la commande `pause` après chaque nouveau calcul.

2- Quelques équations différentielles
On considère les équations suivantes:

- équation de van der Pol

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = y_2 \\ y_2'(t) = (1-y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_1(0) = 1/2 \qquad y_2(0) = 1/2 \end{array}\right. \tag{2}$$

  sur $t \in [0, 25]$

- équation de Mathieu

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = y_2 \\ y_2'(t) = -(2-\cos(2t))y_1 \\ y_1(0) = 1 \quad y_2(0) = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

  sur $t \in [0, 30]$

- équation de Curtiss-Hirschfelder

$$\left\{\begin{array}{l} y'(t) = -50(y - \cos(t)) \\ y(0) = 1 \end{array}\right. \tag{4}$$

  sur $t \in [0, 10]$.

1) En modifiant le programme `logistic.m`, programmer pour chacune de ces équations le schéma d'Euler explicite. On représentera sur un même graphique les deux composantes de la solution de (2), (3). Effectuer les calculs avec différentes valeurs du pas de temps `dt`.
2) Vérifier que la solution exacte de (4) est donnée par

$$y(t) = \frac{2500}{2501}\cos t + \frac{50}{2501}\sin t + \frac{1}{2501}e^{-50t} \tag{5}$$

3) Tracer l'erreur au cours du temps entre la solution calculée par la méthode d'Euler explicite et la solution de référence (ou la solution exacte) pour chacune des 3 équations.

3- Equation de Van der Pol
On considère l'équation de Van der Pol suivante

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = y - f(x) \\ y'(t) = -x \\ x(0) = a \qquad y(0) = b \end{array}\right. \tag{6}$$

1) On appelle *portrait de phase* pour le système (4) la courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), y(t)$. Tracer le portrait de phase approché quand on utilise le schéma d'Euler explicite.
2) Qu'est-ce qu'un point d'équilibre pour un système différentiel tel que (4) ?. Vérifier que $(0, 0)$ est un point d'équilibre instable.
3) On souhaite observer la bifurcation de Hopf lorsque $\mu = 0$ associée à la fonction $f_\mu(x) = x^3 - \mu x$. Lorsque $1 \geq \mu > 0$, on a une unique orbite périodique et l'origine est une source. Lorsque $-1 \leq \mu \leq 0$, 0 est un puit. Vérifier ceci numériquement.

4- Calcul d'erreur
1) Vérifier que $y(t) = e^{-t}\sin(2t)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} y'(t) = -y + 2e^{-t}\cos(2t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

2) Programmer le schéma d'Euler explicite pour cette équation.
3) Représenter les courbes $t^n = n\Delta t \mapsto \ln|y(t^n) - y^n|$, où y^n est la solution approchée.

5- Un programme général
1) Ecrire un programme général qui résoud une équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{8}$$

par le schéma d'Euler explicite. On appellera une fonction `matlab` qui correspond à $f(y,t)$.
2) Utiliser ce programme pour trouver une approximation à 10^{-4} près des fonctions $y(t)$ solutions des problèmes suivants:

$$\begin{cases} y'(t) = y + e^{-y} + 2t \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - t + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{t^2+y^2}{1+t+y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} y'(t) = e^t y^2 - 2y \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} y'(t) = ty^3 - y \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{13}$$

On présentera les courbes sur des graphiques indépendants.